

Równania różniczkowe Lista 6

Zad 1. Scałkować następujące równania (niezawierające szukanej funkcji):¹

	równanie		równanie		równanie
a)	$(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$	c)	$xy'' = y'$	e)	$xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$
b)	$y'' + 2xy' = 0$	d)	$y'(1+y'^2) = ay''$	f)	$x(\ln x) \cdot y'' = y'$

Zad 2. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla następujących równań oraz warunków początkowych, zbadać uprzednio zagadnienie istnienia i jednoznaczności poszukiwanych rozwiązań:

	równanie	x_0	y_0	y'_0		równanie	x_0	y_0	y'_0	y''_0
a)	$y'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$	0	1	0	c)	$4y' + y''^2 = 4xy''$	0	0	-1	...
b)	$y''^2 = y'$	0	0	1	d)	$2xy'' + y''' = 0$	0	1	1	1

Zad 3. Scałkować następujące równania (niezawierające zmiennej niezależnej):

	równanie		równanie		równanie
a)	$yy'' = y'^3$	c)	$1 + y'^2 = 2yy''$	e)	$y'' = \frac{1}{8\sqrt{y}}$
b)	$yy''^2 = 1$	d)	$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$	f)	$y'' = -y'^2 + 2e^{-y}$

Zad 4. Znaleźć rozwiązanie równania spełniającego warunki początkowe wykazując uprzednio, że poszukiwane rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne:

$$a) \quad 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2, \quad y = 1, y' = 0, x = 0; \quad b) \quad 3y'y'' = e^y, \quad y = 0, y' = 1, x = -3.$$

Zad 5. Znaleźć krzywą całkową równania $y'' + y'^2 = 1$, przechodzącą przez punkt $(0, 1)$ i będącą styczną w tym punkcie do prostej $x + y = 1$.

Zad 6. Znaleźć krzywą całkową równania $yy'y'' = y'^3 + y''^2$ styczną w początku układu do prostej $x + y = 0$.

Zad 7. Znaleźć krzywe płaskie, których promień krzywizny jest proporcjonalny do długości odcinka normalnej. Rozpatrzyć przypadek, gdy współczynnik proporcjonalności k jest równy liczbom ± 1 i ± 2 .²

Zad 8. Scałkować następujące równania liniowe jednorodne

	równanie		równanie		równanie
a)	$y'' - 6y' + 8y = 0$	i)	$y'' + 4y = 0$	r)	$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$
b)	$y'' + 3y' + 2y = 0$	j)	$y''' = y$	s)	$y^{(4)} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$
c)	$y'' + 3y' = 0$	k)	$y''' - 2y'' + 9y' = 18y$	t)	$y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$
d)	$y'' - y' - 2y = 0$	l)	$y^{(4)} - y = 0$	u)	$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0$
e)	$y'' - 2y' = 0$	m)	$y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$	w)	$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
f)	$y''' + 2y = 2y'' + y'$	n)	$y^{(4)} + y = 0$	x)	$y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$
g)	$y^{(4)} + 4y = 5y''$	o)	$y^{(6)} - y = 0$	y)	$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$
h)	$y^{(5)} + 9y' = 10y'''$	p)	$y''' - 6y'' + 12y' = 8y$	z)	$y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

¹a) jednym z rozwiązań jest $y = \ln|x|$.

²zastosować wzór na promień krzywizny $R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.